3.5. Homogena linearna diferencijalna jednačina n –tog reda sa konstantnim koeficijentima

Razmotrimo homogenu LDJ n-tog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

gdje su $a_i \in R$ (i=1,2,..., n).

Da bi riješili jednačinu (1) potrebno je naći njenih n linearno nezavisnih rješenja. Saglasno Ojleru, rješenje jednačine (1) tražimo u obliku

$$y = e^{\lambda x}, \tag{2}$$

gdje je λ parametar koji treba odrediti. Kako je $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$,...., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$, to poslije zamjene u (1) dobijamo da je

$$L(e^{\lambda x}) \equiv e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0.$$

Dakle, da bi jednačina (1) imala rješenje oblika (2), parametar λ mora biti rješenje polinomne jednačine

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3}$$

Polinom $P(\lambda)$ nazivamo karakteristični polinom jednačine (1), a jednačinu (3) karakteristična jednačina jednačine (1).

U zavisnosti od toga kakva su rješenja jednačine (3) razlikujemo dva slučaja.

1. Neka su korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jednačine (3) prosti, tj. $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada je $P(\lambda_i) = 0$, za i=1,2,..., n. Kako je $L(e^{\lambda_i x}) = e^{\lambda_i x} P(\lambda_i) = 0$, to su funkcije $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}, x \in R$, rješenja jednačine (1). Dokažimo da su ova rješenja linearno nezavisna, tj. da se od njih može napraviti izraz za proizvoljno rješenje. Stvarno je

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x} \prod_{1\le j<i\le n} \left(\lambda_i-\lambda_j\right) \neq 0,$$

pa su rješenja $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., $e^{\lambda_n x}$, $x \in R$ linearno nezavisna. Slijedi, proizvoljno rješenje jednačine (1) je funkcija

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x},\ x \in R,$$

gdje su C_1, C_2, ..., C_n -proizvoljne konstante.

Primjer 1. Riješiti jednačine: a) $y''-3y'+2y=0$, b) $y'''-4y''-5y'=0$.

a) Karakteristična jednačina $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ima korijene $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=2$. Slijedi, proizvoljno rješenje je funkcija $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$, $x\in R$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

b) Karakteristična jednačina $\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda=0$ ima korijene: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$. Slijedi,

$y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{5x}$, $x\in R$, gdje su C_1, C_2 i C_3 proizvoljne konstante.

Primjer 2. Riješiti jednačinu $y''-4y'+13y=0$.

Korijeni karakteristične jednačine $\lambda^2-4\lambda+13=0$ su konjugovano kompleksni brojevi: $\lambda_1=2-3i$ i $\lambda_2=2+3i$. Slijedi, proizvoljno rješenje je funkcija $y=C_1e^{(2-3i)x}+C_2e^{(2+3i)x}$, $x\in R$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Uočimo da je rješenje linearna kombinacija kompleksnih funkcija. Dokažimo da se to rješenje može prikazati kao linearna kombinacija realnih funkcija. Kako je

$$e^{(2-3i)x}=e^{2x}\cdot e^{-3ix}=e^{2x}\left(\cos 3x - i\sin 3x\right) \text{ i } e^{(2+3i)x}=e^{2x}\left(\cos 3x + i\sin 3x\right),$$

to je

$$y=C_1e^{(2-3i)x}+C_2e^{(2+3i)x}=C_1e^{2x}\left(\cos 3x - i\sin 3x\right)+C_2e^{2x}\left(\cos 3x + i\sin 3x\right)=$$

$$\gamma_1 e^{2x}\cos 3x+\gamma_2 e^{2x}\sin 3x = e^{2x}\left(\gamma_1\cos 3x+\gamma_2\sin 3x\right),$$

gdje su $\gamma_1=C_1+C_2$ i $\gamma_2=-i(C_1-C_2)$.

Ovo što smo uradili u prethodnom primjeru možemo uraditi u proizvoljnom slučaju. Ako su $\lambda_1=a-bi$ i $\lambda_2=a+bi$ korijeni karakteristične jednačine, tada se u izrazu za proizvoljno rješenje umjesto kompleksnih funkcija $e^{(a-bi)x}$ i $e^{(a+bi)x}$ mogu uzeti realne funkcije $e^{ax}\cos bx$ i $e^{ax}\sin bx$.

2. Neka je λ korijen karakteristične jednačine (3) višestrukosti r. Tada se može dokazati da paru (λ, r) odgovara r linearno nezavisnih rješenja:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

jednačine (1).

Primjer 3. Riješiti jednačine: a) $y''-4y'+4y=0$, b) $y'''-7y''+15y'-9y=0$.

a) Ovdje je $\lambda^2-4\lambda+4=0$, tj. $\lambda_1=\lambda_2=2$. Slijedi, funkcije e^{2x} i xe^{2x} su linearno nezavisna rješenja date jednačine. Proizvoljno rješenje je funkcija $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$, $x\in R$, gdje su C_1, C_2 -proizvoljne konstante.

b) Korijeni karakteristične jednačine $\lambda^3-7\lambda^2+15\lambda-9=0$ su $\lambda_1=1$ i $\lambda_{2/3}=3$. Korijenu $\lambda_1=1$ pridružujemo funkciju e^x, a rješenjima $\lambda_{2/3}=3$ funkcije e^{3x} i xe^{3x}. Slijedi, proizvoljno rješenje date jednačine je funkcija $y=C_1e^x+e^{3x}(C_2+C_3x)$, $x\in R$, gdje su C_1, C_2 i C_3 -proizvoljne konstante.

Primjer 4. Riješiti jednačinu $y^{(4)}+2y''+y=0$.

Nađimo korijene karakteristične jednačine $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$. Kako je $\lambda^4+2\lambda^2+1=\left(\lambda^2+1\right)^2=0$, to je $\lambda_1=\lambda_2=-i$ i $\lambda_3=\lambda_4=i$. Proizvoljno rješenje date jednačine je funkcija $y=C_1e^{-ix}+C_2xe^{-ix}+C_3e^{ix}+C_4xe^{ix}$, $x\in R$. Uočimo da je rješenje linearna kombinacija kompleksnih funkcija. Dokažimo da se ono može zapisati kao linearna kombinacija realnih funkcija. Kako je $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ i $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, to je $y=C_1\left(\cos x-i\sin x\right)+C_2x\left(\cos x-i\sin x\right)+C_3\left(\cos x+i\sin x\right)+C_4x\left(\cos x+i\sin x\right)=$

$$\gamma_1\cos x+\gamma_2x\cos x+\gamma_3\sin x+\gamma_4x\sin x=\left(\gamma_1+\gamma_2x\right)\cos x+\left(\gamma_3+\gamma_4x\right)\sin x$$

gdje je $\gamma_1=C_1+C_3$, $\gamma_2=C_2+C_4$, $\gamma_3=-i\left(C_1-C_3\right)$, $\gamma_4=-i\left(C_2-C_4\right)$.

Kako u opštem slučaju riješiti jednačinu (1)? Evo algoritma:

a) Naći korijene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ karakteristične jednačine (3) i odrediti njihovu višestrukost (redom): r_1, r_2, ..., r_s. (Uočimo da je $r_1+r_2+\ldots+r_s=n$).

b) Svakom paru $\left(\lambda_i, r_i\right)$ pridružiti r_i rješenja: $e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$, ..., $x^{r_i-1}e^{\lambda_i x}$.

c) Napisati linearnu kombinaciju od dobijenih n rješenja (to je proizvoljno rješenje jednačine (1)).

Rješenja koja su kompleksne funkcije mogu se zamijeniti realnim funkcijama. Pri tome se mora znati: ako je $\alpha-i\beta$ korijen karakteristične jednačine (3) višestrukosti r, tada je i $\alpha+i\beta$ njen korijen višestrukosti r. Umjesto $2r$ kompleksnih funkcija:

$$e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{(\alpha-i\beta)x},\ e^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$$

može se uzeti $2r$ realnih funkcija:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Postoje jednačine koje se pogodnom smjenom mogu svesti na jednačine s konstantnim koeficijentima. Takva je Ojlerova jednačina:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

gdje su $a_i \in R$ (i=1,2,...,n). Neka je $x > 0$. Uvedimo smjenu $x = e^{\xi}$, tj. $\xi = \ln x$. Tada je $y_x' = y_\xi' \xi_x = y_\xi' \cdot \frac{1}{x}$, $xy_x' = y_\xi'$, $y_x'' = y_\xi'' \frac{1}{x^2} - y_x' \frac{1}{x^2}$, $x^2 y_x'' = y_\xi'' - y_\xi'$ itd.

Primjer 5. Riješiti jednačine: a) $x^2 y'' + xy' - y = 0$, b) $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

a) Uvedimo smjenu $\xi = \ln x$. Tada je $xy_x' = y_\xi'$ i $x^2 y_x'' = y_\xi'' - y_\xi'$ i $y_\xi'' - y = 0$. Dalje je $y = C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{\xi}$, odnosno $y = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 x$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

b) Smjenom $\xi = \ln x$ jednačina se svodi na jednačinu $y_\xi'' - 2y_\xi' + y = 0$ čije je rješenje $y = C_1 e^{\xi} + C_2 \xi e^{\xi}$, odnosno $y = C_1 x + C_2 x \ln|x|$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Primjer 1: Riješiti jednačine: ①

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$.

R] a) Karakteristična jednačina je:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Njena rješenja su $\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ tj:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$$

pa je opšte rješenje jednačine:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$ gdje su C_1, C_2 proizvoljne konstante.

b) Karakteristična jednačina je:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

tj. $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 5.$

Opšte rješenje polazne jednačine je:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{5x} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{5x}$$

gdje su C_1, C_2, C_3 proizvoljne konstante.

Primjer 2: Riješiti jednačinu:

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Karakteristična jednačina ove jednačine je:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

a njena rješenja su:

$$\lambda_1 = 2 - 3i, \quad \lambda_2 = 2 + 3i$$

②

Ako su $\lambda_1 = a - bi$, $\lambda_2 = a + bi$ korijeni karakteristične jednačine, tada smo pokazali da je opšte rješenje oblika:

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

tj. $$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

Kod nas su korijeni karakteristične jednačine: $\lambda_1 = 2 - 3i$ i $\lambda_2 = 2 + 3i$ pa je opšte rješenje:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

gdje su C_1, C_2 proizvoljne konstante.

Primjer 3: Riješiti jednačine:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$ b) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

R: a) Ovdje je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Slijedi, funkcije e^{2x} i xe^{2x} su linearno nezavisna rješenja date jednačine pa je opšte rješenje:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$$

b) Karakteristična jednačina je:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0$$

tj. $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 9\lambda - 9 = 0$

$$\lambda^2(\lambda-1) - 6\lambda(\lambda-1) + 9(\lambda-1) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

$$\lambda = 1 \lor \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2/3} = 3$$

Korijenu $\lambda_1 = 1$ pridružujemo funkciju e^x, a rješenjima $\lambda_{2/3} = 3$ funkcije e^{3x} i xe^{3x}. Slijedi, proizvoljno rješenje date jednačine je funkcija: $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$ gdje su c_1, c_2, c_3 proizvoljne konstante.

P~~Zadatak 4.~~

– Lagranžov metod varijacije konstanti za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima –

Neka je data jednačina:

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x) \quad (1)$$

gdje su $p, q \in R$ i $f(x)$ neprekidna funkcija na nekom intervalu $S \subset R$.

Neka su $z_1(x)$ i $z_2(x)$ linearno nezavisna rješenja homogene jednačine:

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0.$$

Prema tome,

$$z_1''(x) + p\,z_1'(x) + q\,z_1(x) = 0, \quad z_2''(x) + p\,z_2'(x) + q\,z_2(x) = 0$$

i $\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ za svako $x \in S$.

Opšte rješenje nehomogene jednačine (1) tražimo u obliku:

$$y(x) = C_1(x)\,z_1(x) + C_2(x)\,z_2(x)$$

gdje su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nepoznate funkcije koje ćemo odrediti iz sistema:

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,z_1(x) + C_2'(x)\,z_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\,z_1'(x) + C_2'(x)\,z_2'(x) &= f(x). \end{aligned} \quad (*)$$

Determinanta ovog sistema je: (5)

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ za } \forall x \in S.$$

pa je na osnovu Kramerovog pravila:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2(x) \\ f(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}, \quad \cancel{c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(x) & 0 \\ z_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(x) & 0 \\ z_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Odavde je:

$$c_1(x) = \int \frac{-f(x) z_2(x)}{z_1(x) z_2'(x) - z_2(x) z_1'(x)} dx$$

i $$c_2(x) = \int \frac{z_1(x) f(x)}{z_1(x) z_2'(x) - z_2(x) z_1'(x)} dx$$

pa je $C_1(x) = g_1(x) + D_1$ i $C_2(x) = g_2(x) + D_2$

Opšte rješenje jednačine (1) je:

$$y = C_1(x) z_1(x) + C_2(x) z_2(x) =$$

$$= D_1 z_1(x) + D_2 z_2(x) + g_1(x) z_1(x) + g_2(x) z_2(x)$$

⑥

<u>Primjer 4:</u> Naći opšte rješenje jednačine:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, \quad (1) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Karakteristična jednačina homogene jednačine $y''+4y=0$ je $\lambda^2+4=0$ i njena rješenja su $\lambda_1=-2i$, $\lambda_2=2i$ pa je opšte rješenje homogene jednačine $y_h = e^{0\cdot x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$

tj. $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Opšte rješenje jednačine (1) tražimo u obliku:

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Odgovarajući sistem je:

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0$$
$$C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \frac{1}{\cos 2x}$$

---

tj.

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0$$
$$C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Prema tome,

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Одавде добијамо:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \left[\begin{array}{l}\cos 2x = t\\ -2\sin 2x = dt\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + D_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + D_1$$

и $C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + D_2$.

Опште решење једначине (1) је:

$$y = D_1\cos 2x + D_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$